

उच्च गणित - 2012

समय : 3 घण्टे]

कक्षा : 12वीं

[पूर्णांक : 100

- निर्देश- (1) सभी प्रश्न अनिवार्य हैं।
 (2) प्रश्नों के अंक उनके सम्मुख दर्शाए गये हैं।
 (3) प्रश्न-पत्र में दो खण्ड दिये गये हैं- खण्ड 'अ' एवं खण्ड 'ब'।
 (4) खण्ड 'अ' में दिये गये प्रश्न क्रमांक 1 से 5 तक वस्तुनिष्ठ प्रश्न हैं जिसके अन्तर्गत रिक्त स्थानों की पूर्ति, सत्य/असत्य, सही जोड़ी बनाना तथा सही विकल्प का चयन करना है।
 (5) खण्ड 'ब' में प्रश्न क्रमांक 6 से 21 में आंतरिक विकल्प दिये गये हैं।

खण्ड - अ (वस्तुनिष्ठ प्रश्न)

प्रश्न : एक वस्तुनिष्ठ प्रश्न में दिये गये विकल्पों में से सही उत्तर लिखिए: 5

- (1) भिन्न $\frac{2}{x^2-1}$ को आंशिक भिन्नो के रूप में लिखने पर सही उत्तर होगा:

(a) $\frac{1}{2} \left[\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1} \right]$ (b) $\frac{1}{2} \left[\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} \right]$

(c) $\frac{1}{2} \left[\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-1} \right]$ (d) $\left[\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} \right]$

- (2) $\tan^{-1}x + \cot^{-1}x$ का मान होगा:

(a) π (b) शून्य

(c) $\frac{\pi}{2}$ (d) 1

- (3) X-अक्ष का समीकरण है:

(a) $\frac{X}{1} = \frac{Y}{0} = \frac{Z}{0}$ (b) $\frac{X}{0} = \frac{Y}{1} = \frac{Z}{1}$

(c) $\frac{X}{1} = \frac{Y}{1} = \frac{Z}{1}$ (d) इनमें से कोई नहीं

- (4) यदि $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ क्रमशः X, Y, Z अक्षों के अनुदिश इकाई सदिश हैं, तो

$\hat{i} \times (\hat{j} \times \hat{k})$ का मान होगा:

(a) शून्य (b) 1
 (c) -1 (d) इनमें से कोई नहीं

- (5) गोले $x^2 + y^2 + z^2 - ax - by - cz = 0$ का केन्द्र होगा:

(a) (a, b, c) (b) (-a, -b, -c)

(c) $\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{c}{2} \right)$ (d) $\left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}, -\frac{c}{2} \right)$

प्रश्न 2 निम्नलिखित कथनों में सत्य/असत्य बताइए:

1 × 5

- (1) $\vec{a} \cdot (\vec{a} \times \vec{b})$ का मान शून्य होता है।
- (2) $\cos 2x$ का अवकल गुणांक $\sin 2x$ होता है।
- (3) सहसंबंध गुणांक का मान सदैव 2 होता है।
- (4) यदि दो समाश्रयण गुणांक क्रमशः 0.8 व 0.2 हो, तो सहसंबंध गुणांक शून्य होगा।
- (5) समीकरण $x^3 - 2x - 5 = 0$ का मूल अंतराल (2 3) में होगा।

प्रश्न 3. रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए:

1 × 5

- (1) दो प्रतिच्छेदी रेखाओं के बीच की न्यूनतम दूरी सदैव होती है।
- (2) यदि सदिश $\vec{a} = \hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$ तथा $\vec{b} = \hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$, तो $\vec{a} \cdot \vec{b}$ का मान होगा।
- (3) किसी कण की अधिकतम ऊँचाई पर वेग होता है।
- (4) $\sin x$ का n वाँ अवकलज होगा।
- (5) उस समतल का समीकरण जो अक्षों से इकाई अंतःखण्ड काटे होगा।

प्रश्न 4. निम्नलिखित प्रश्नों के उत्तर एक शब्द/वाक्य में दीजिए:

1 × 5

- (1) $0.2642E05 + 0.3781E05$ का मान लिखिये।
- (2) समलंब चतुर्भुज नियम

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{2}[y_0 + 2(y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1}) + y_n]$$

में h का मान लिखिए।

- (3) न्यूटन-रैफ्सन विधि में प्रथम आवृत्ति के लिए सूत्र लिखिए।
- (4) आंकिक विधियों संबंधी सिम्पसन का एक-तिहाई नियम के अनुसार सूत्र लिखिये।
- (5) यदि $\vec{a} = \hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$ तथा $\vec{b} = -\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$, तो $|\vec{a} + \vec{b}|$ का मान क्या होगा?

प्रश्न 5. खण्ड 'अ' के लिए खण्ड 'ब' में से सही उत्तर चुनकर सही जोड़ी बनाइये: 5

(अ)

(ब)

(i) $\int \cot x \, dx$

(a) $\frac{1}{2} \log x + c$

(ii) $\int \tan x \, dx$

(b) $\frac{1}{2} \tan x + c$

$$(iii) \int \frac{1}{1+\cos 2x} dx$$

$$(c) \log (\sin x) + c$$

$$(iv) \int (1+\tan^2 x) dx$$

$$(d) \log (\sec x) + c$$

$$(v) \int \operatorname{cosec} x dx$$

$$(e) \tan x + c$$

$$(f) \log \left(\tan \frac{x}{2} \right) + c$$

खण्ड - ब (अति लघूत्तरीय प्रश्न)

प्रश्न 6. भिन्न $\frac{x}{1-x^3}$ को आंशिक भिन्न में व्यक्त कीजिये।

(अथवा) भिन्न $\frac{x^2-5x-1}{(x-1)^2(x-2)}$ को आंशिक भिन्न में व्यक्त कीजिये।

प्रश्न 7. सिद्ध कीजिए:

4

$$\cos^{-1} \frac{4}{5} + \sin^{-1} \frac{5}{13} = \cos^{-1} \frac{33}{65}$$

(अथवा) यदि $\tan^{-1} a + \tan^{-1} b + \tan^{-1} c = \pi$ हो, तो सिद्ध कीजिए कि-
 $a+b+c = abc$

प्रश्न 8. $x^{\sin x}$ का अवकलन गुणांक ज्ञात कीजिए।

4

(अथवा) यदि $x = a \sin^3 \theta$ तथा $y = a \cos^3 \theta$, तो $\frac{dy}{dx}$ का मान ज्ञात कीजिए।

प्रश्न 9. यदि $y = \sqrt{\cos x + \sqrt{\cos x + \sqrt{\cos x + \dots \infty}}}$ हो, तो सिद्ध कीजिए कि :

4

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-\sin x}{(2y-1)}$$

(अथवा) यदि $y = (\sin^{-1} x)^2$ हो, तो सिद्ध कीजिए कि $(1-x^2) \frac{d^2 y}{dx^2} - x \frac{dy}{dx} = 2$

प्रश्न 10. $\sin x + \cos x$ का अधिकतम मान ज्ञात कीजिए (अवकलन द्वारा)

4

(अथवा) यदि बर्फ का एक गोला एकसमान दर से पिघलता है, तो गोले की त्रिज्या 5 सेमी होने पर गोले के आयतन के परिवर्तन की दर इसकी त्रिज्या के सापेक्ष ज्ञात कीजिए।

प्रश्न 11. निम्नांकित आंकड़ों के आधार पर सहसंबंध गुणांक ज्ञात कीजिए:

4

x	y
2	15
3	17
5	4
7	5
3	4

(अथवा) निम्नांकित आंकड़ों के आधार पर सहसंबंध गुणांक की गणना कीजिये:

x	y
-10	5
-5	9
0	7
5	11
10	13

प्रश्न 12. यदि समाश्रयण रेखाएँ क्रमशः $3x + 12y - 19 = 0$ तथा $9x + 3y - 46 = 0$, हो, तो सहसंबंध गुणांक ज्ञात कीजिए।

4

(अथवा) यदि y की x पर समाश्रयण रेखा $ax + by + c = 0$ हो तथा x की y पर समाश्रयण रेखा $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ हो, तो सिद्ध कीजिए:

$$ab_1 \leq a_1b.$$

लघुउत्तरीय प्रश्न

प्रश्न 13. बिंदु $(-1, 3, 2)$ से गुजरने वाले उस समतल का समीकरण ज्ञात कीजिए जो $x + 2y + 2z = 5$ तथा $3x + 3y + 2z = 8$ पर लंब हो।

5

(अथवा) रेखा $\frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{4} = \frac{z-2}{12}$ और समतल $x - y + z = 5$ के प्रतिच्छेद बिंदु की $(-1, -5, -10)$ से दूरी ज्ञात कीजिए।

प्रश्न 14. सिद्ध कीजिये कि त्रिभुज की तीन माध्यिकाओं द्वारा निर्धारित सदिशों का योग शून्य होता है जबकि माध्यिकाएँ शीर्ष से निर्देशित हैं।

5

(अथवा) यदि $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = 0$ हो, तो सिद्ध कीजिए कि $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{b} \times \vec{c} = \vec{c} \times \vec{a}$ जहाँ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ शून्येतर सदिश हैं।

प्रश्न 15. यदि $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x+1} & x \neq -1 \\ -2 & x = -1 \end{cases}$

तो क्या $f(x)$, $x = -1$ पर सतत है।

5

(अथवा) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2+x} - \sqrt{2-x}}{x}$ का मान ज्ञात कीजिए।

प्रश्न 16. $\int \frac{xe^x}{(x+1)^2} dx$ का मान ज्ञात कीजिये। 5

(अथवा) $\int \frac{1}{5+4\sin x} dx$ का मान ज्ञात कीजिये।

प्रश्न 17. सिद्ध कीजिए कि $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1+\tan x} = \frac{\pi}{4}$ 5

(अथवा) वृत्त $x^2 + y^2 = a^2$ से घिरा क्षेत्रफल समाकलन द्वारा ज्ञात कीजिए।

प्रश्न 18. अवकल समीकरण को हल कीजिए: 5

$$(1+x^2)dy = (1+y^2)dx$$

(अथवा) अवकल समीकरण का हल ज्ञात कीजिये:

$$\frac{dy}{dx} + y \tan x = \sec x$$

प्रश्न 19. यदि दो घनाकार पाँसों को एक साथ फेंका जाए, तो दोनों पाँसों पर अंकों का योग 7 से अधिक या 7 से कम आने की प्रायिकता क्या होगी? 5

(अथवा) यदि तीन घोड़ों A, B तथा C के दौड़ जीतने के अनुकूल संयोगानुपात क्रमशः 1:2, 1:3 तथा 1:4 हैं, तो किसी एक घोड़े के दौड़ जीतने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

दीर्घ उत्तरीय प्रश्न

प्रश्न 20. सिद्ध कीजिए कि बिन्दुओं $(1, 0, 1)$, $(1, 1, 1)$ तथा $(-7, -3, -5)$ से होकर जाने वाला समतल xz समतल पर लंब है। 6

(अथवा) उस गोले का समीकरण ज्ञात कीजिए जो बिंदुओं $(0, 0, 2)$, $(0, 2, 0)$ तथा $(2, 0, 0)$ से होकर जाता है और जिसका केन्द्र समतल $x + y + z = 2$ पर स्थित है।

प्रश्न 21. सदिश विधि से सिद्ध कीजिए कि : 6

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

(अथवा) निम्नलिखित रेखाओं के बीच की न्यूनतम दूरी सदिश विधि से ज्ञात कीजिए:

$$\vec{r} = 3\hat{i} + 8\hat{j} + 3\hat{k} + \lambda(3\hat{i} - \hat{j} + \hat{k})$$

$$\text{तथा } \vec{r} = -3\hat{i} - 7\hat{j} + 6\hat{k} + \mu(-3\hat{i} + 2\hat{j} + 4\hat{k})$$

